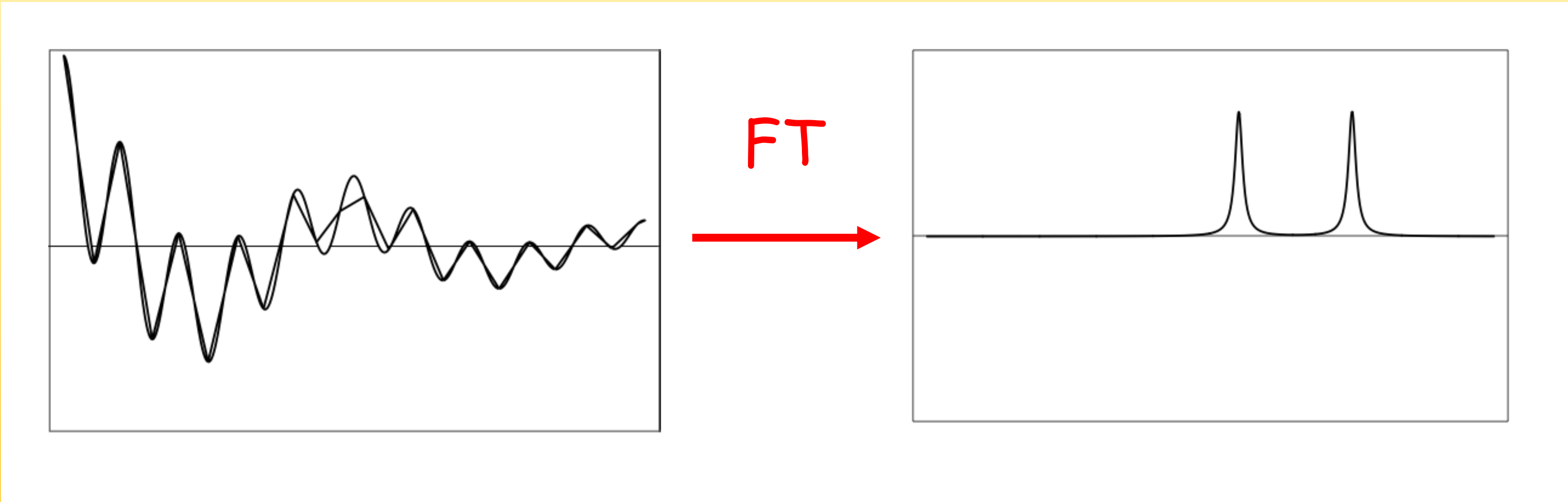
Die
Fourier-Transformation

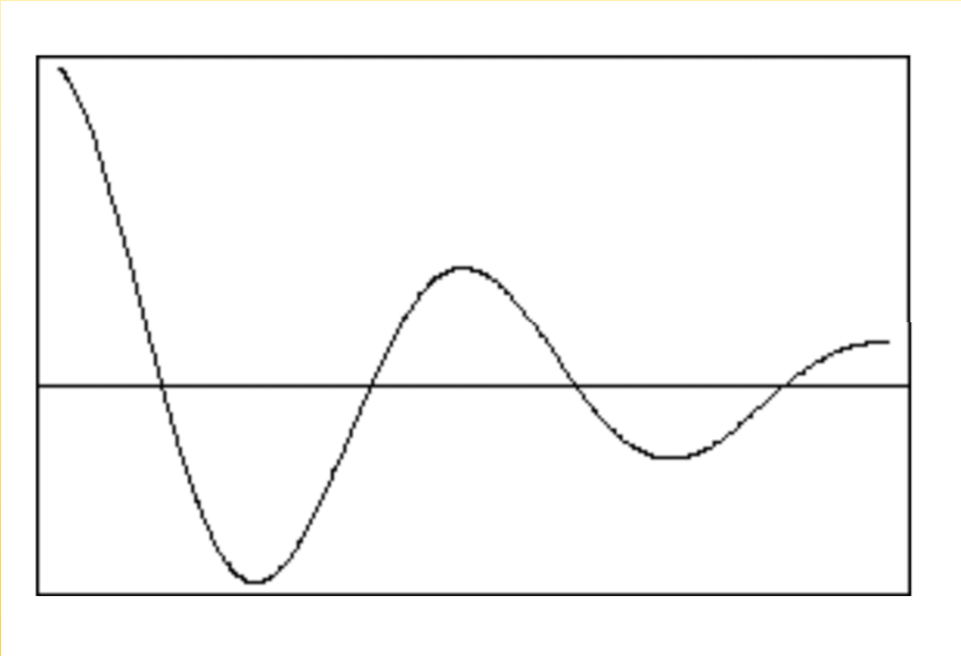
Die Fouriertransformation

Die FT ermittelt aus dem Signal von überlagerten Schwingungen welche Frequenzen enthalten sind



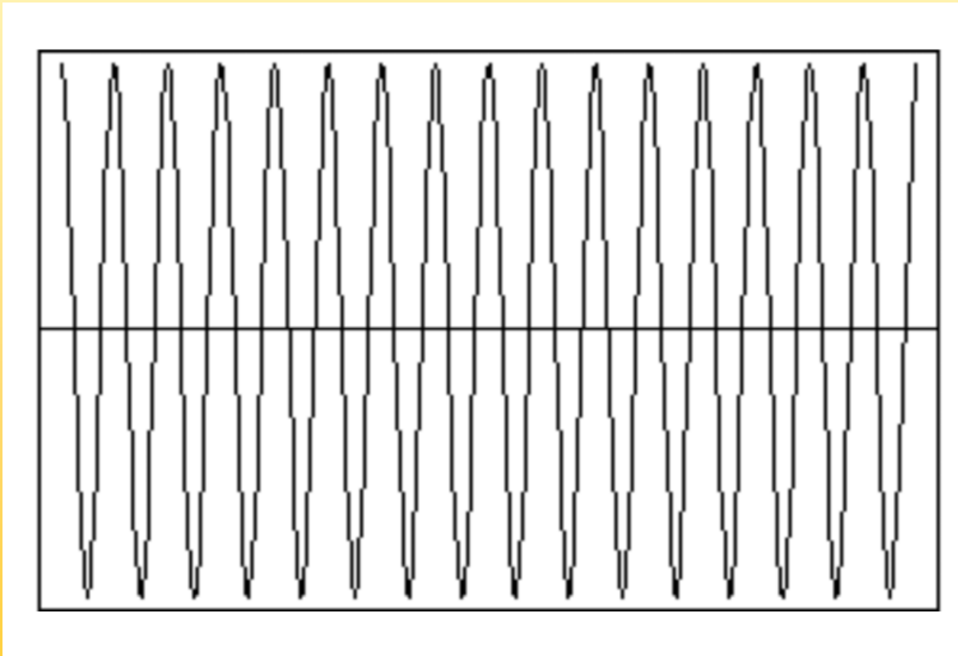
Die Fouriertransformation

Von der folgenden Schwingung soll die Frequenz ermittelt werden



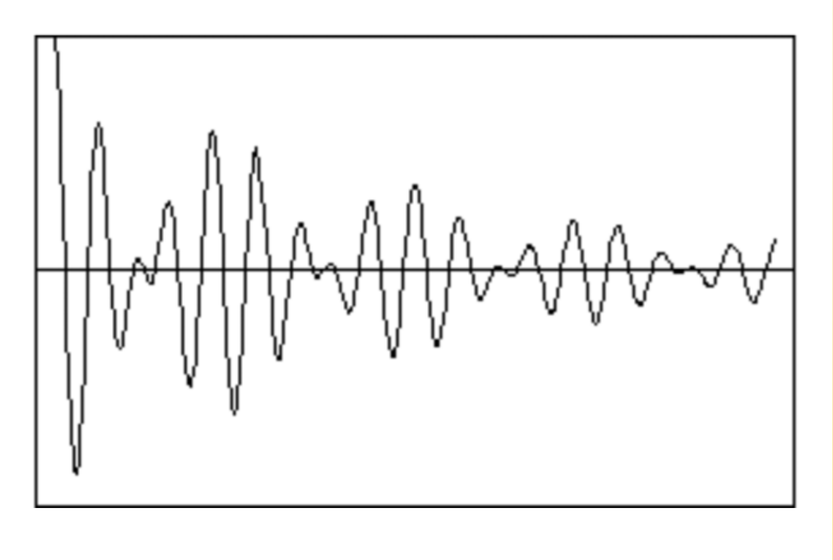
Die Fouriertransformation

Dazu „raten“ wir eine Frequenz und erzeugen das dazugehörige Zeitsignal



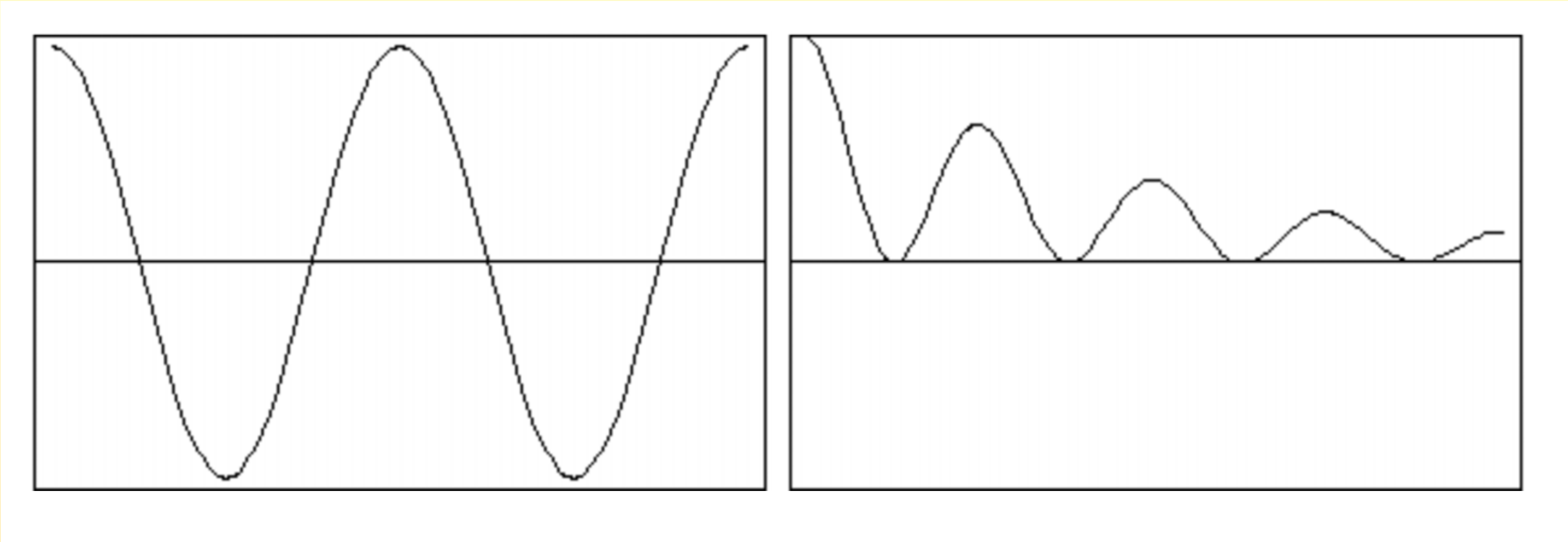
Die Fouriertransformation

Dann werden die beiden miteinander multipliziert und über alle Zeitpunkte aufsummiert



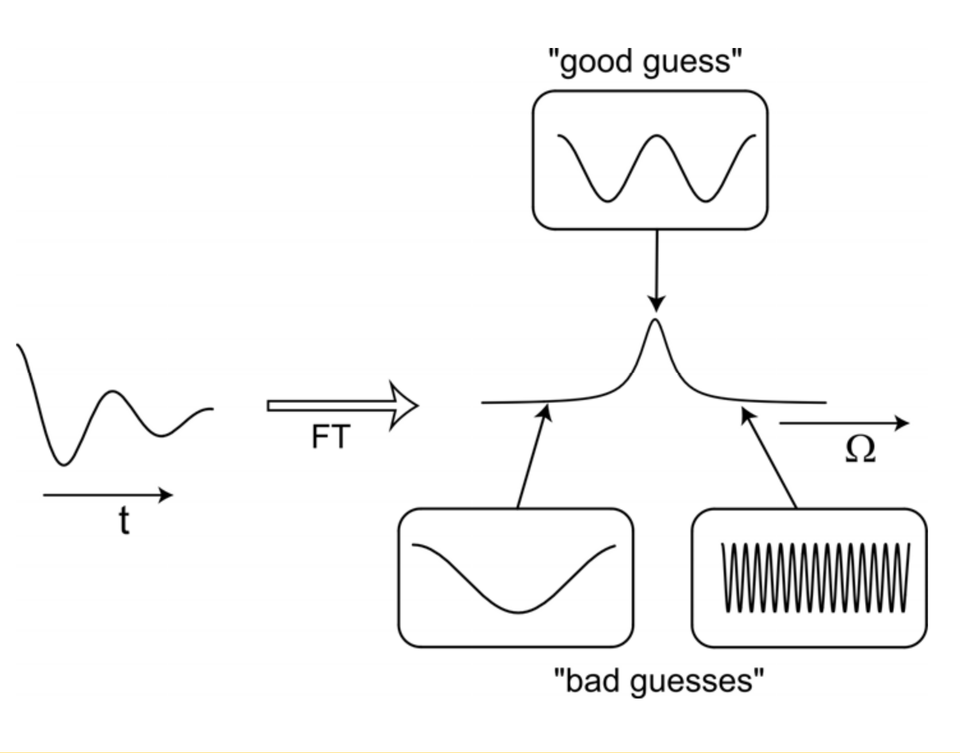
Hier „passt" die Frequenz nicht, es gibt ähnlich viele positive wie negative Punkte, das Resultat ist nahe 0 !

Die Fouriertransformation



Hier „passt“ die Frequenz sehr gut, fast alle Punkte sind größer als null, das Resultat der Summe ist daher auch sehr groß

Die Fouriertransformation



Das machen wir nun ganz systematisch für alle möglichen Frequenzen und erhalten eine Kurve aufgetragen gegen die Frequenz, ein „Spektrum“

Die Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist in Gleichungen am einfachsten mit einem komplexen Signal zu erläutern

Ein komplexes NMR-Signal hat - wie gesehen - die Form

$$s(t) = \underbrace{\exp(i\phi)}_{\text{Signalphase (zeitunabhängig !)}} \; \underbrace{\exp(i\Omega_0 t)}_{\text{Signaloszillation (die Frequenz)}} \; \underbrace{\exp(-t/T_2)}_{\text{Signalabfall (Relaxation)}}$$

Die Fouriertransformation

Wir ignorieren den Phasenfaktor zunächst und führen eine Fouriertransformation durch.

$$S(\Omega) = \int_0^\infty s(t) \exp(-i\Omega t)\, dt$$

$$S(\Omega) = \int_0^\infty \exp(i\Omega_0 t) \exp(-t/T_2) \exp(-i\Omega t)\, dt$$

$$S(\Omega) = \frac{1}{(1/T_2) + i(\Omega - \Omega_0)}$$ Lorentzlinie

Eine komplexe Funktion besteht aus Realteil und Imaginärteil: $S(\Omega) = R(\Omega) + i\, I(\Omega)$

Die Fouriertransformation

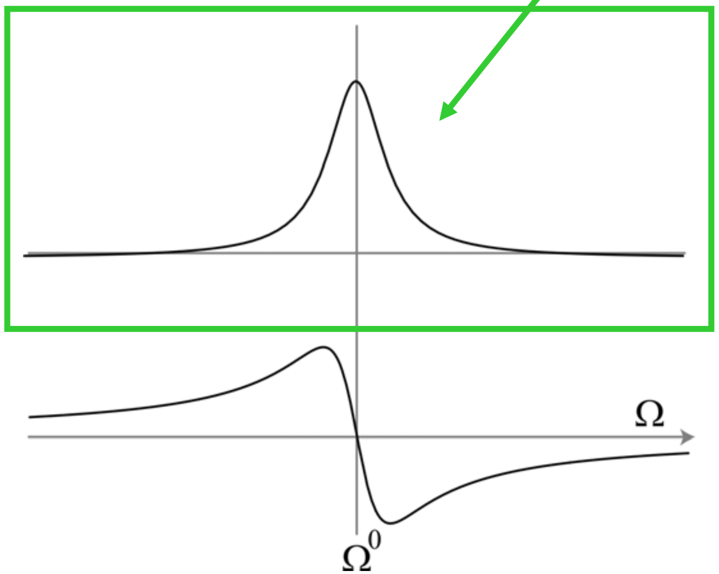
Im einfachsten (besten) Fall ist der Realteil "absorbtiv" und der Imaginärteil "dispersiv":

$$S(\Omega) = A(\Omega) + i\,D(\Omega)$$

das wollen wir sehen

$$A(\Omega) = \frac{(1/T_2)}{(1/T_2)^2 + (\Omega - \Omega_0)^2}$$

$$D(\Omega) = -\frac{(\Omega - \Omega_0)}{(1/T_2)^2 + (\Omega - \Omega_0)^2}$$



Die Fouriertransformation

Nun wissen wir aber, daß die Signale eine Phase haben

$$S(\Omega) = [A(\Omega) + i\, D(\Omega)]\, \exp(i\phi)$$

$$S(\Omega) = R(\Omega) + i\, I(\Omega)$$

Dadurch werden Real- und Imaginärteil Mischungen von (gewünschtem) absorbtiven und (unerwünschtem) dispersiven Signal

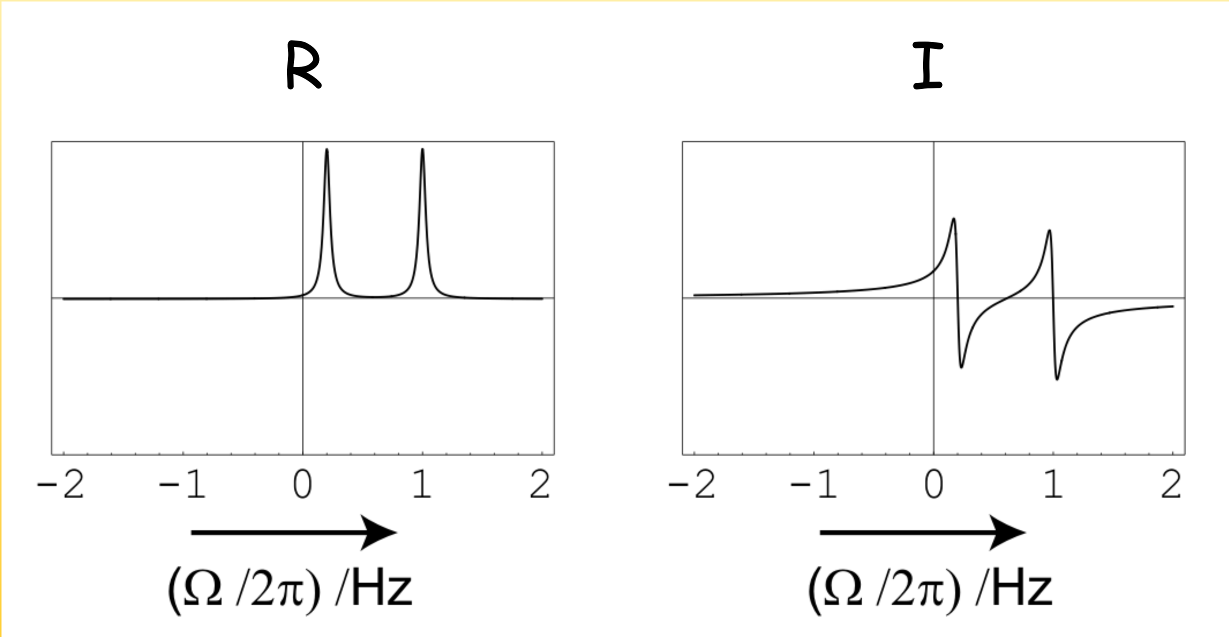
$$R(\Omega) = A(\Omega) \cos \phi - D(\Omega) \sin \phi$$

$$I(\Omega) = D(\Omega) \cos \phi + A(\Omega) \sin \phi$$

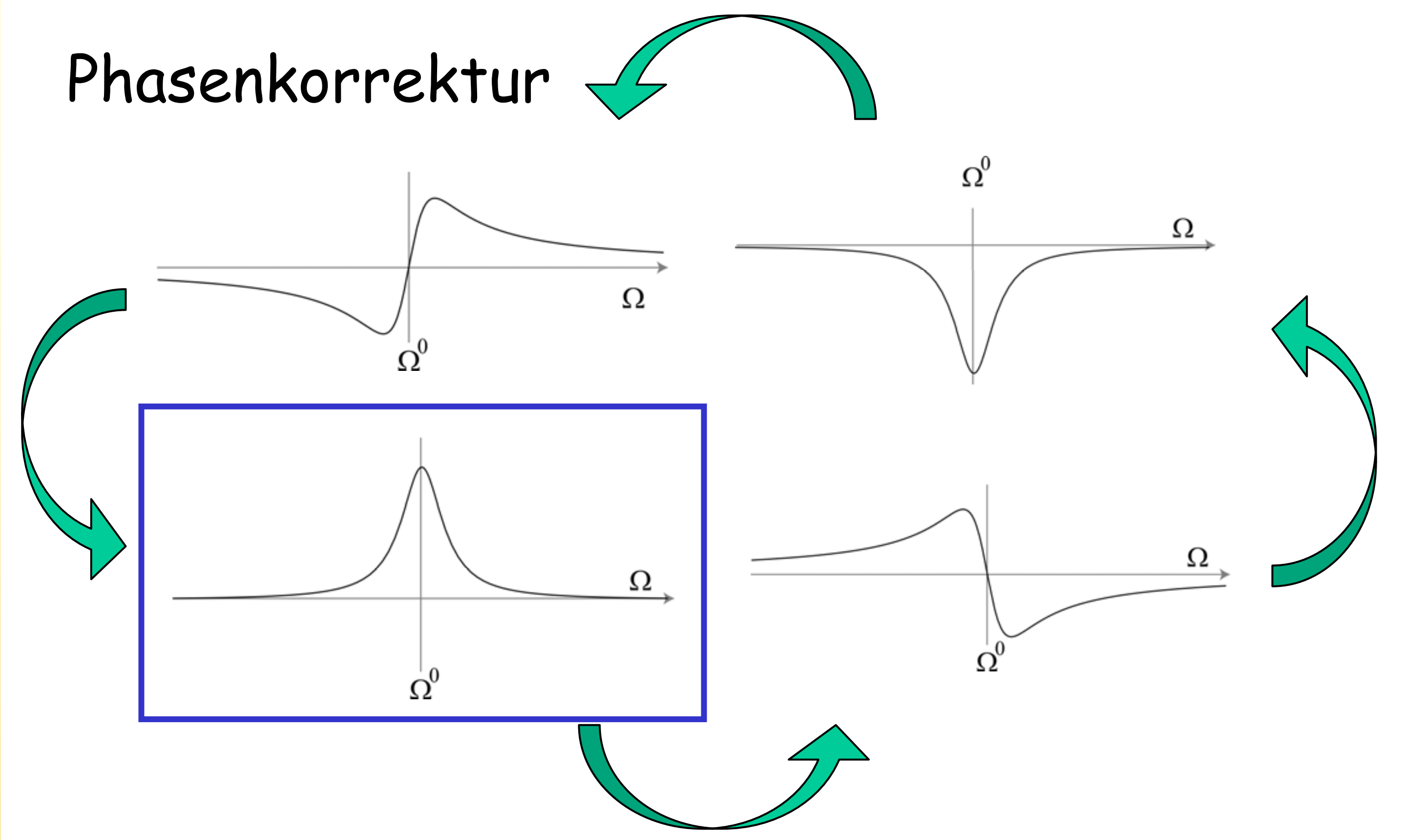
Die Fouriertransformation

Man korrigiert das über eine Phasenkorrektur

$$A(\Omega) = R(\Omega)\cos\phi + I(\Omega)\sin\phi$$
$$D(\Omega) = I(\Omega)\cos\phi - R(\Omega)\sin\phi$$

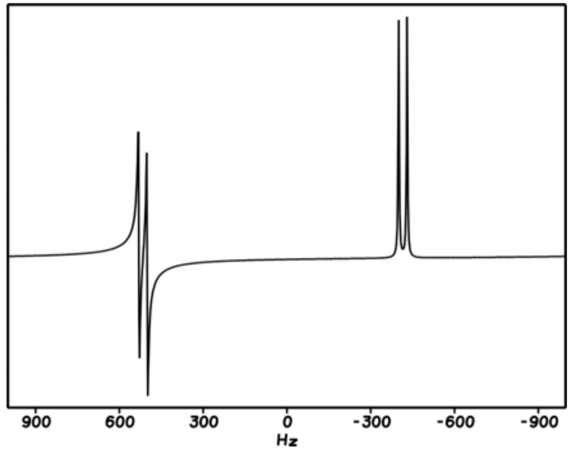


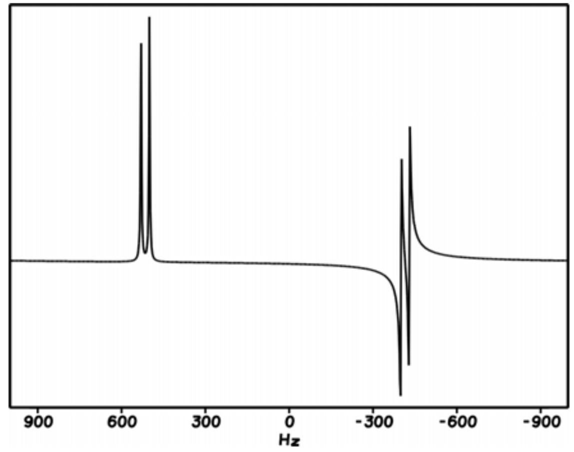
Die Fouriertransformation

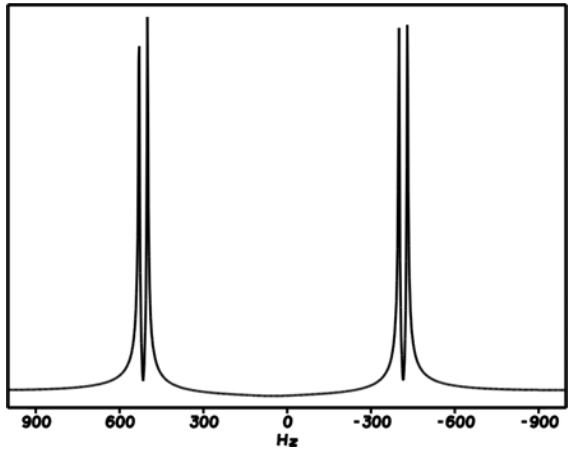


Das klappt solange alle Signale die gleiche Phase haben

Die Fouriertransformation







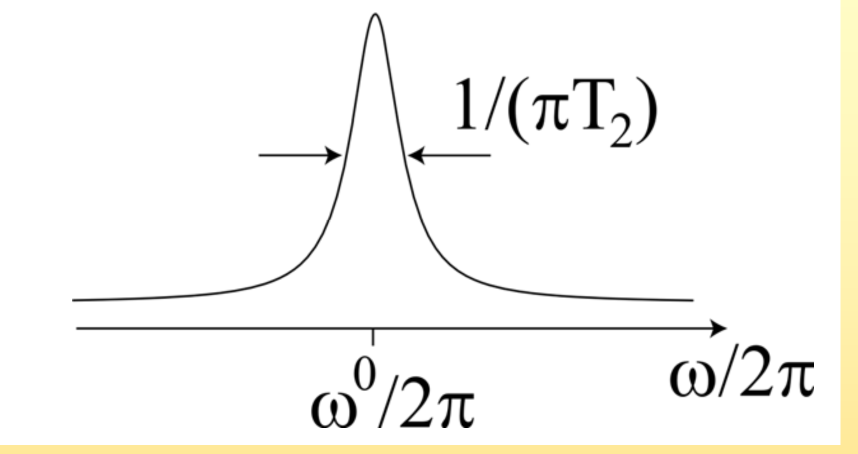
Man erzeugt sonst ein „Magnitude“ Spektrum

$$S = \sqrt{(R)^2 + (I)^2}$$

oder „Power“ Spektrum

$$S = (R)^2 + (I)^2$$

Die Fouriertransformation



$$s(t) = \exp(i\phi)\, \exp(i\omega^0 t)\, \exp(-t/T_2)$$

Signalphase (zeitunabhängig !)

Signaloszillation (die Frequenz)

Signalabfall (Relaxation)

Die Fouriertransformation

Was ist mit konstanten Faktoren ?

$$s(t) = A \exp(i\phi) \exp(i\omega^0 t) \exp(-t/T_2)$$

$$S(\Omega) = \int_0^\infty s(t) \exp(-i\Omega t)\, dt$$

$$S(\Omega) = \int_0^\infty A \exp(i\Omega_0 t) \exp(-t/T_2) \exp(-i\Omega t)\, dt$$

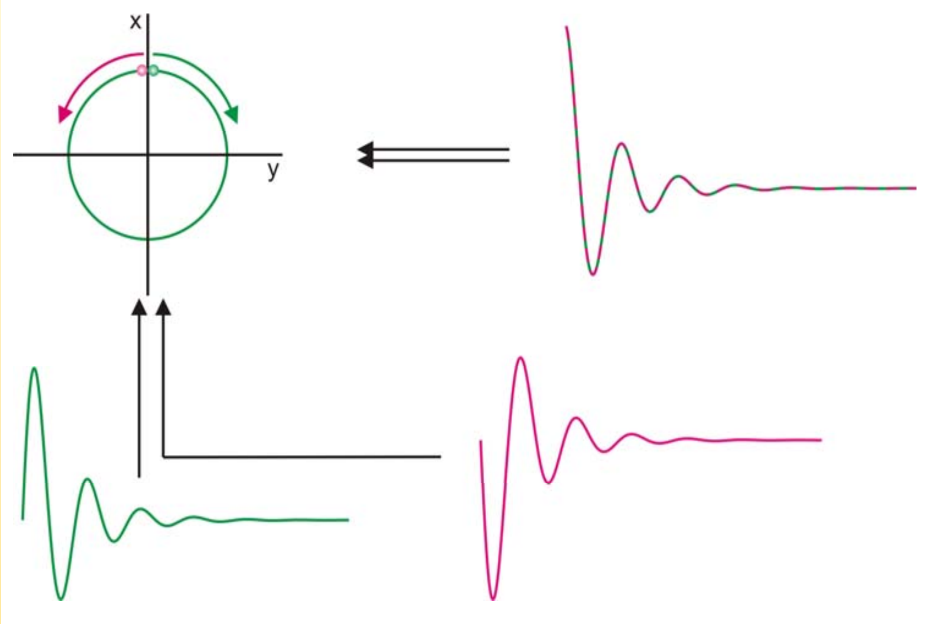
$$S(\Omega) = \frac{A}{(1/T_2) + i(\Omega - \Omega_0)}$$

Die Fouriertransformation ist eine lineare Operation,

deshalb kann man Spektren integrieren

Die Fouriertransformation

Außer für die Möglichkeit der Phasenkorrektur ist die Aufnahme eines komplexen Signals noch für das Problem der Quadraturdetektion von Bedeutung



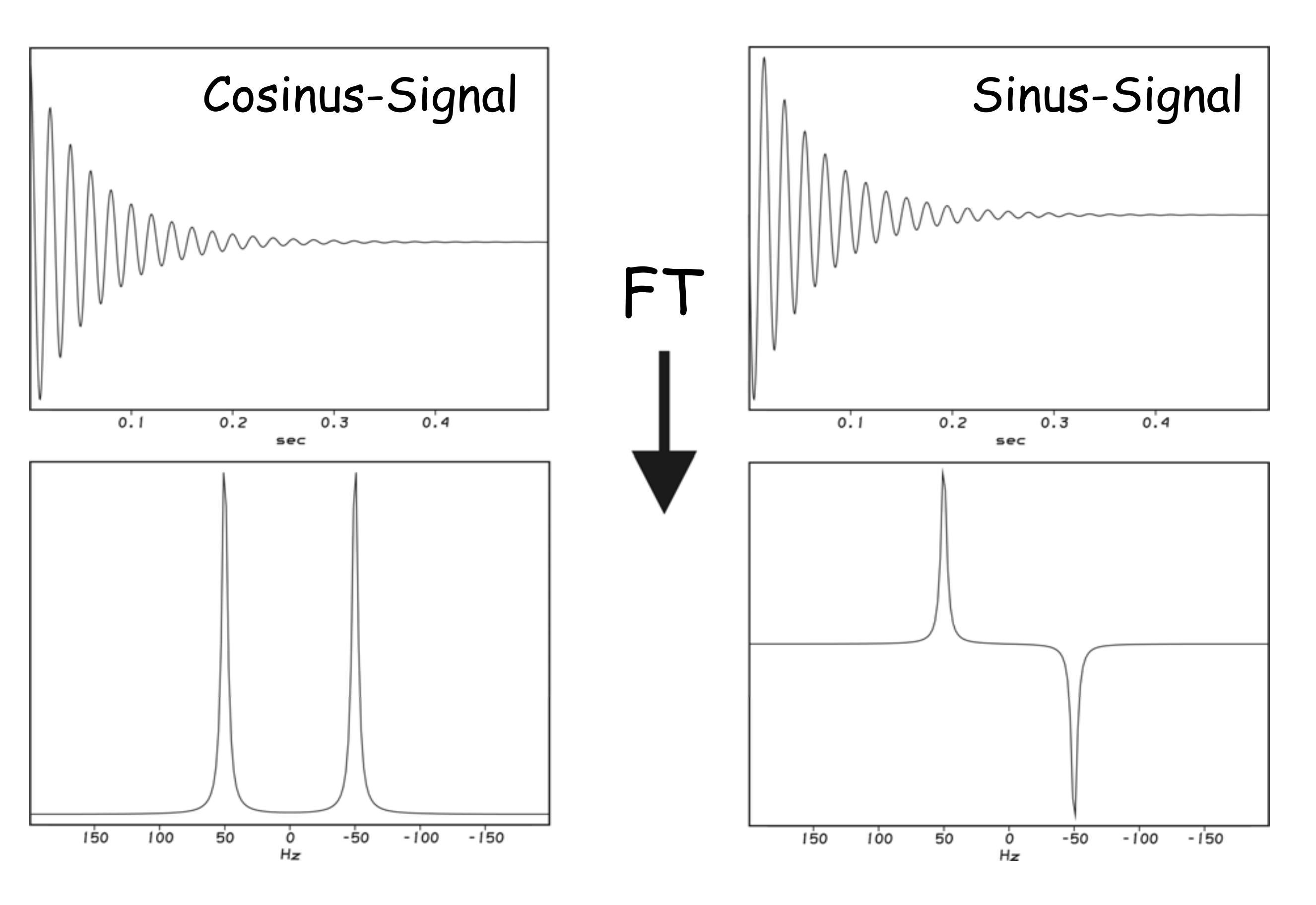
Was wäre wenn wir nur Cosinus- oder nur Sinus-Signal aufnehmen würden ?

$\cos\alpha = \exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)$

$\sin\alpha = \exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)$

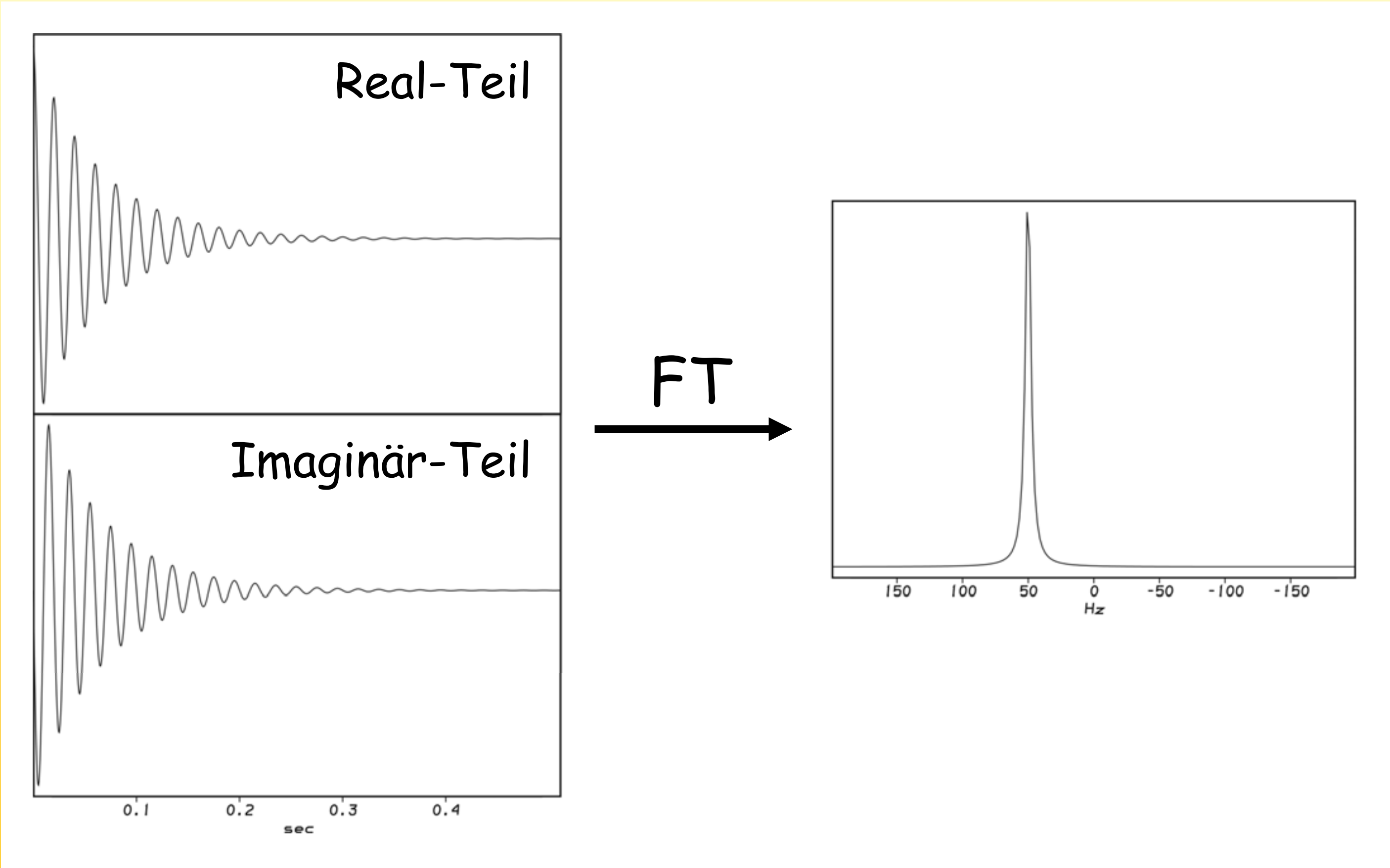
Die Fouriertransformation

Man erhält zwei Signale



Die Fouriertransformation

Weswegen man die beiden eben kombinieren muss…



Die Fouriertransformation

…um in der Mitte des Spektrums senden zu können